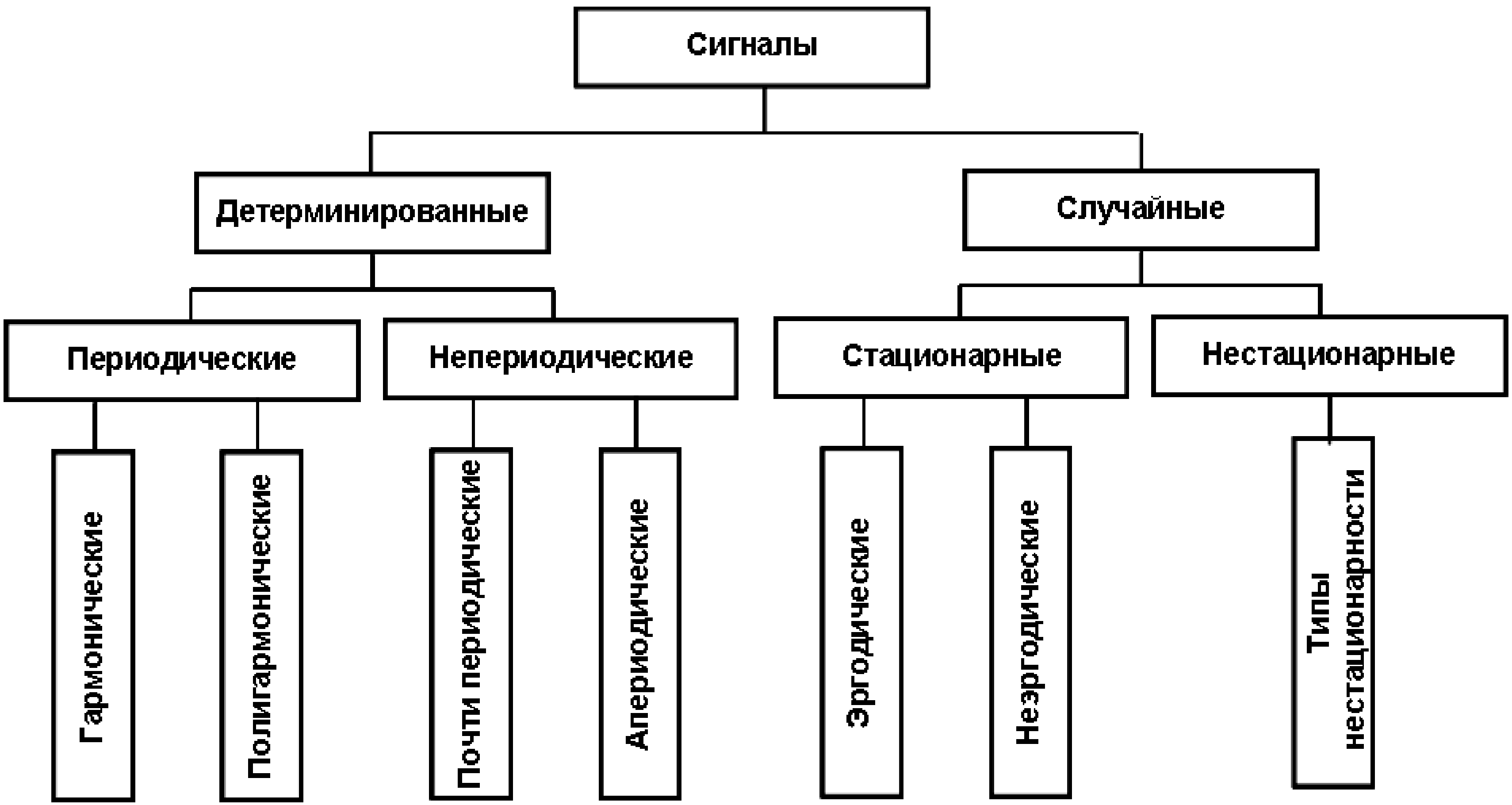
Понятие математической модели сигнала

$$x = F(t, z, \omega, \ldots A, B, C, \ldots),$$

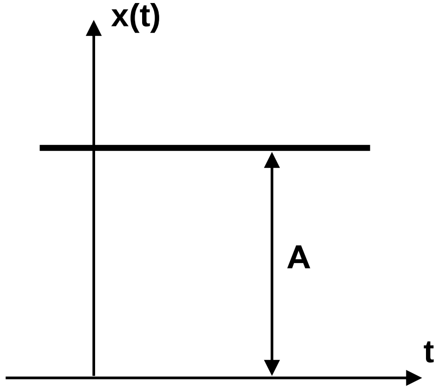


Математические модели детерминированных сигналов

Элементарные (тестовые) сигналы

1. Постоянный сигнал:

x=A; A=const

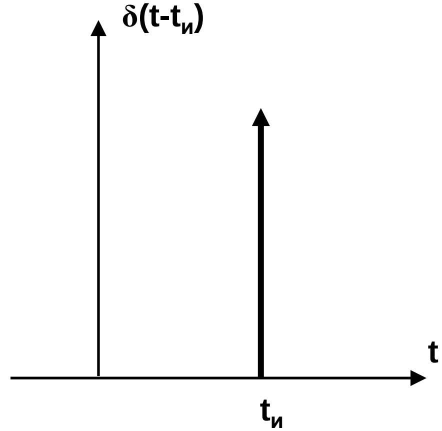


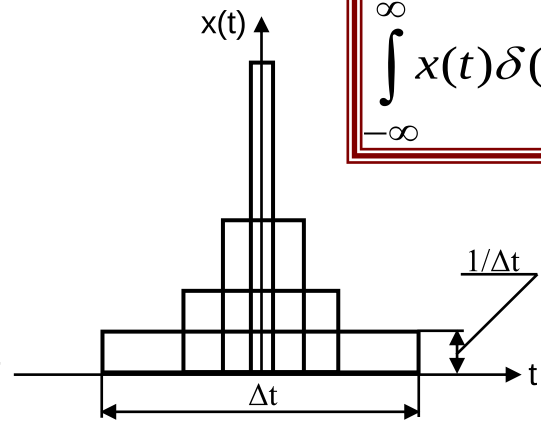
2. Идеальный единичный импульс:

$$\delta(t-t_u) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_и; \\ \propto & \text{при } t = t_и, \end{cases}$$

$$\int_0^t \delta(t-t_0)dt = 1$$

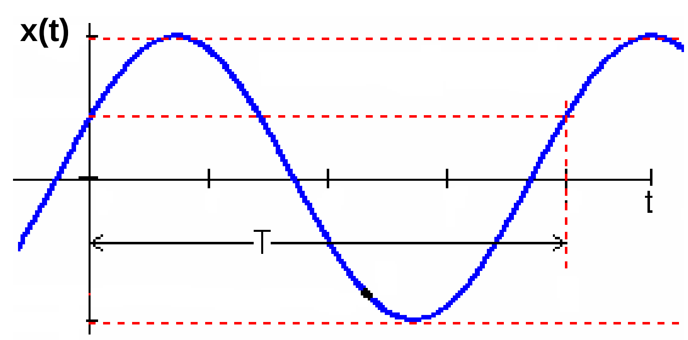
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_u)dt = x(t_u)$$





3. Гармонический сигнал:

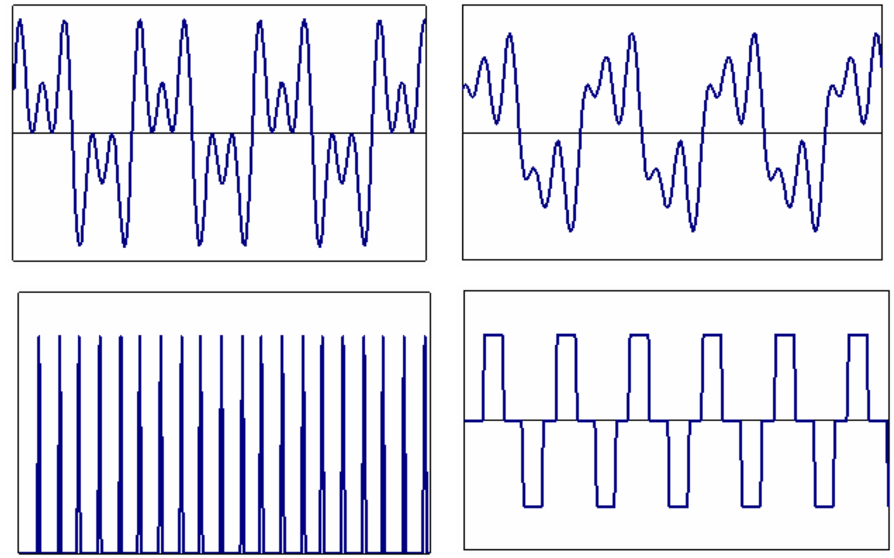
$$x = X_м \sin(\omega t + \varphi) = X_м \sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi)$$



Сложные сигналы

1. Периодические детерминированные сигналы

$$\boxed{x(t) = x(t + kT)}$$



Обобщенный ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \varphi_k(t)$$

Тригонометрический ряд Фурье:

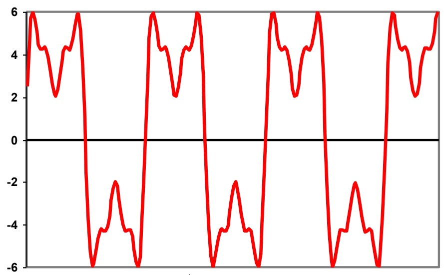
$$x(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \ldots + a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

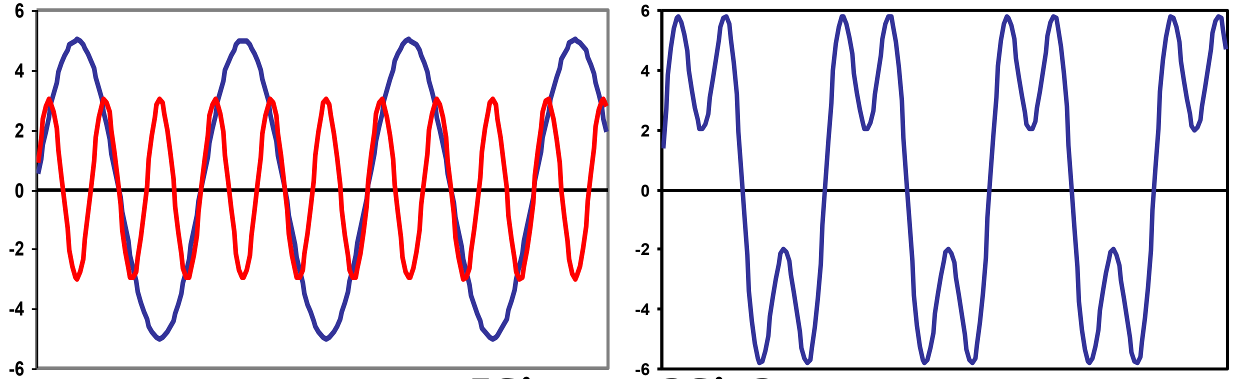
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \quad ; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad ; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

Пример 1.

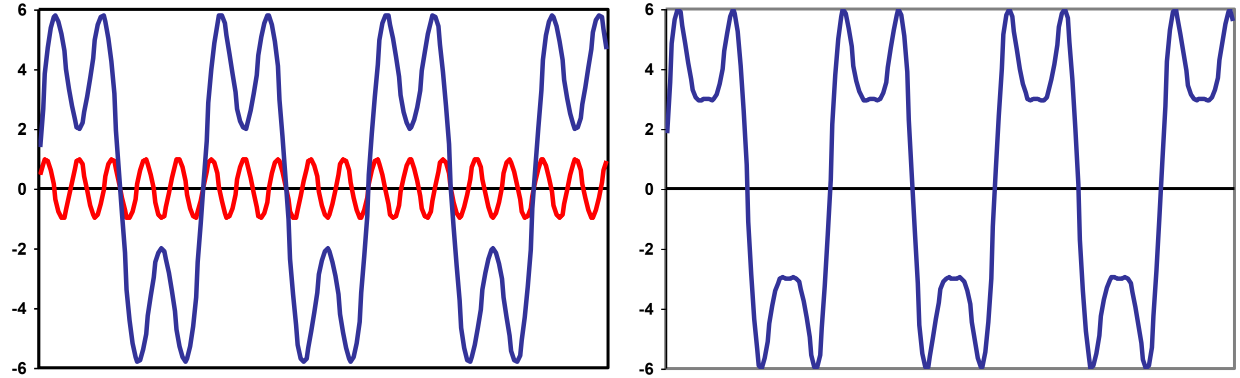
Синтезировать периодический полигармонический сигнал в виде суммы гармонических сигналов:



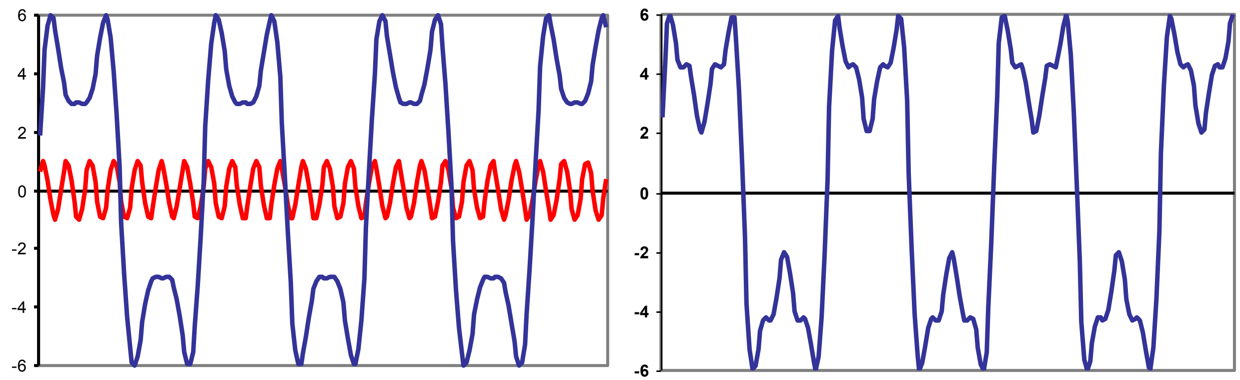
$-\infty < t < \infty$



$5\sin\omega t + 3\sin 3\omega t$



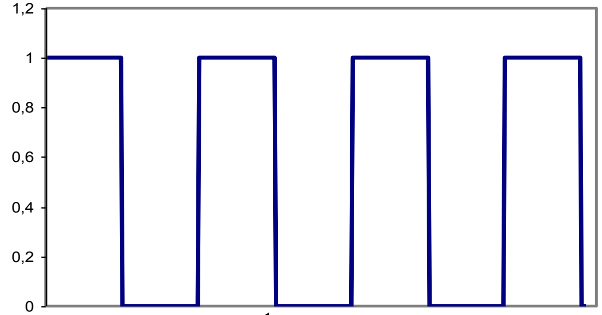
$5\sin\omega t + 3\sin 3\omega t + \sin 5\omega t$



$5\sin\omega t + 3\sin 3\omega t + \sin 5\omega t + \sin 7\omega t$

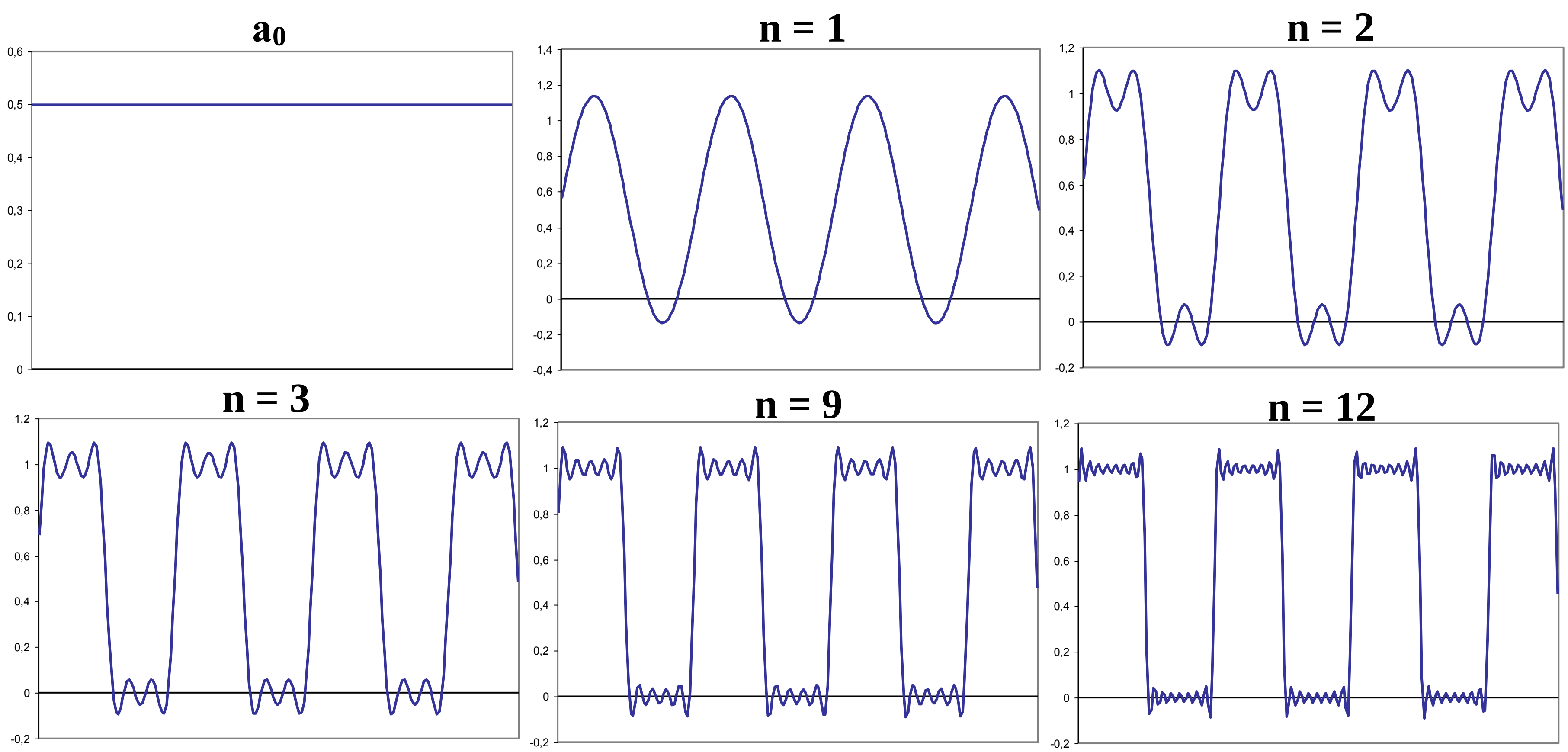
Пример 2.

Синтезировать периодическую последовательность прямоугольных импульсов в виде суммы гармонических сигналов:



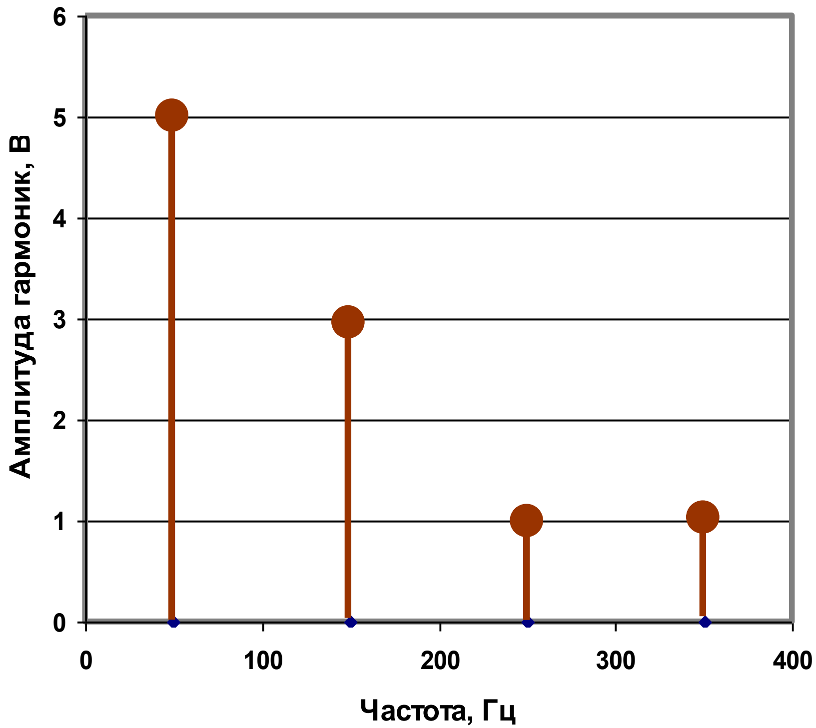
$-\infty < t < \infty$

$$f(t) = \frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\omega\tau}{2}\cos n\omega t$$



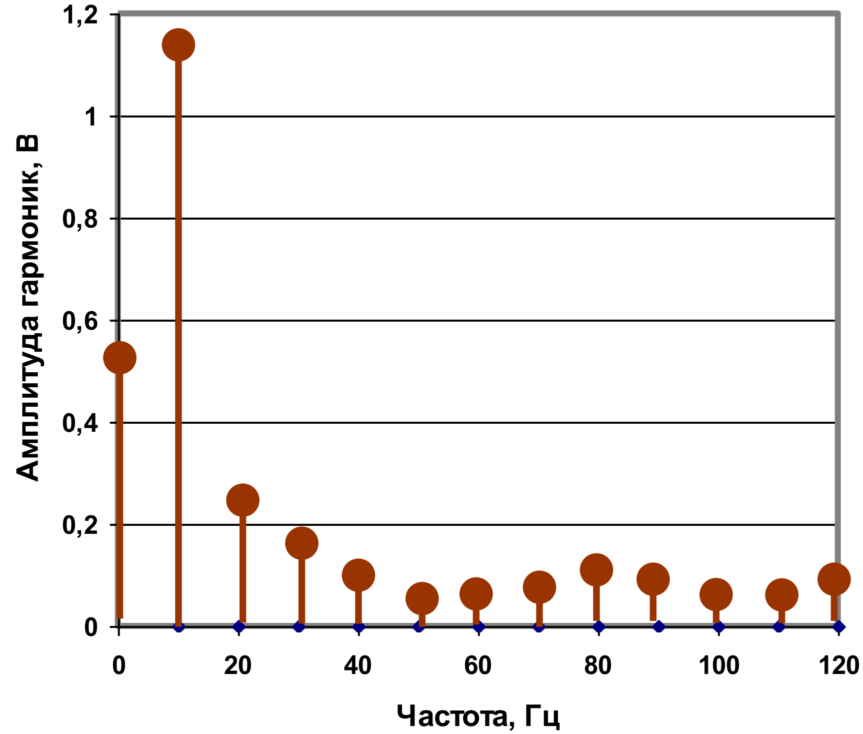
Спектр полигармонического периодического сигнала

$\omega_0 = 50$ Гц



Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

$\omega_0 = 10$ Гц



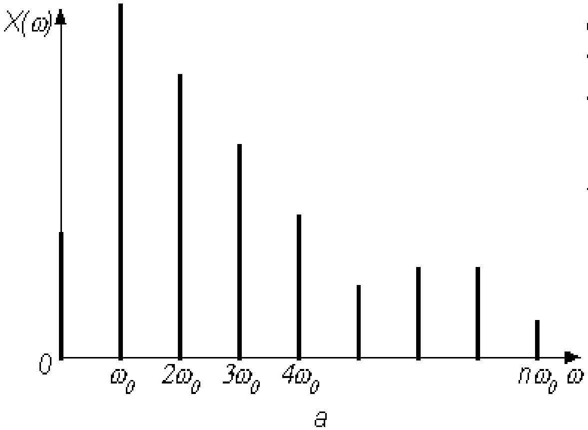
Эквивалентные формы ряда Фурье:

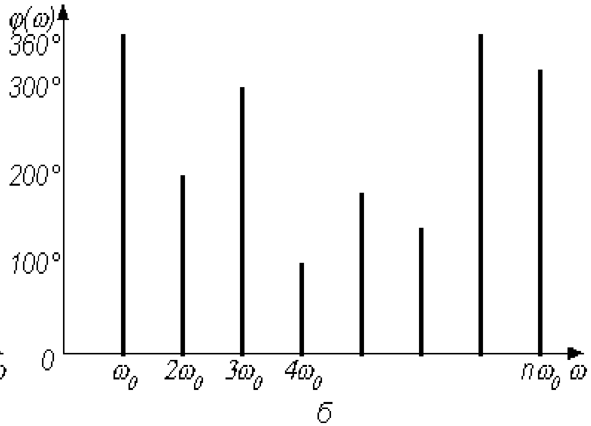
1

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$tg\psi_k = b_k / a_k$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \psi_k)$$





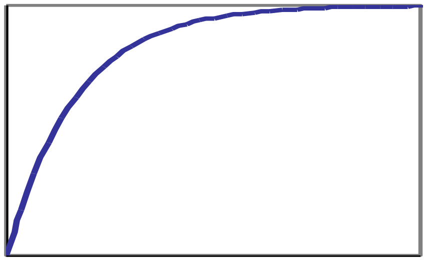
2

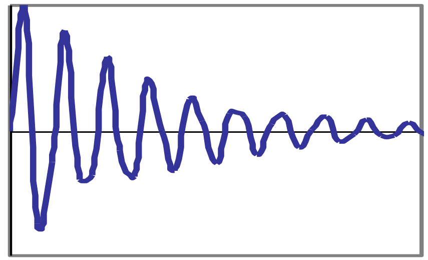
$$x(t) = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} + C_2 e^{2j\omega_0 t} + C_{-2} e^{-2j\omega_0 t} + \ldots +$$

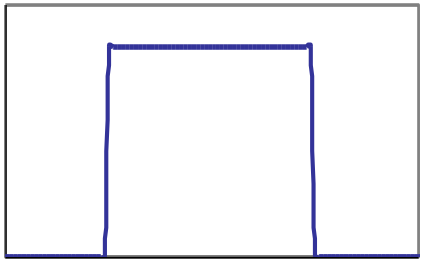
$$+ C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 t};$$

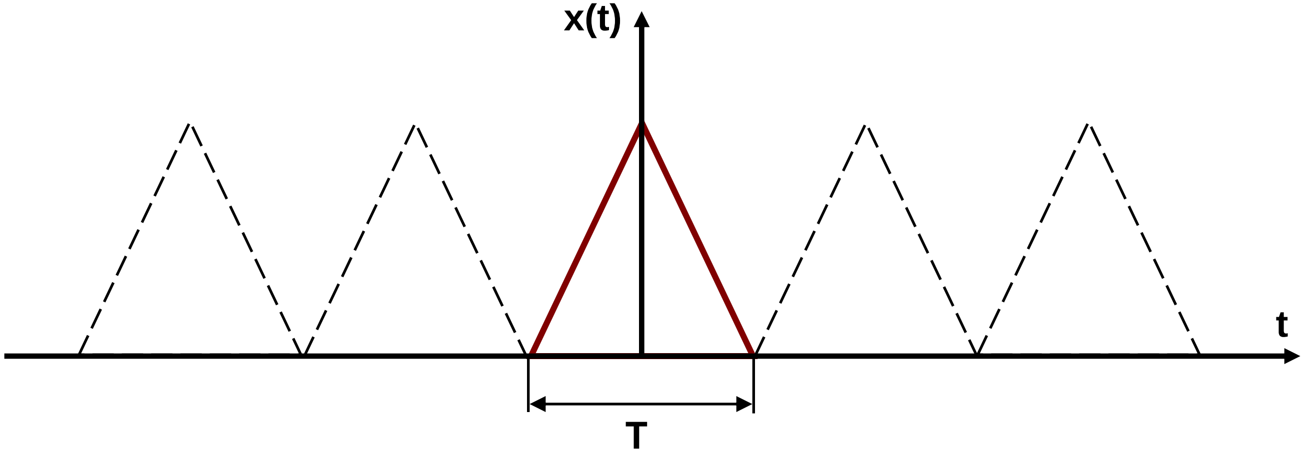
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

2. Непериодические детерминированные сигналы





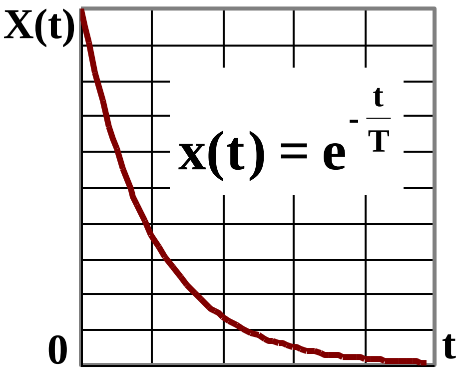




$$x_{пер}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$T \longrightarrow \infty: \quad \boxed{x(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

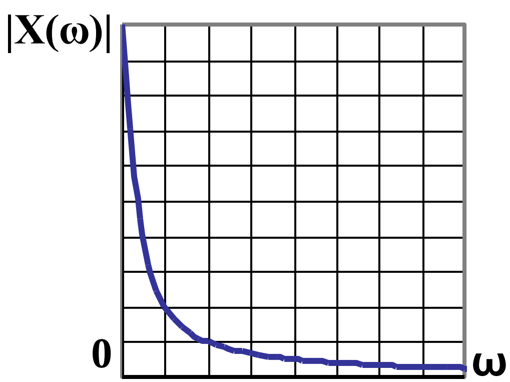
Спектральные характеристики экспоненциального сигнала

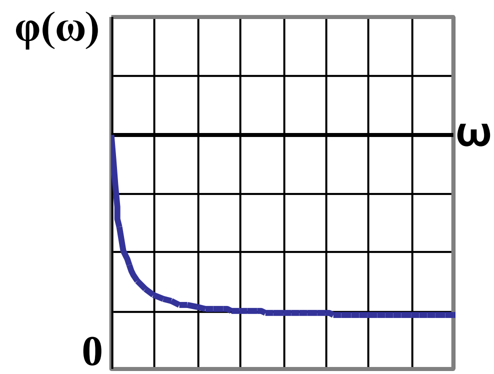


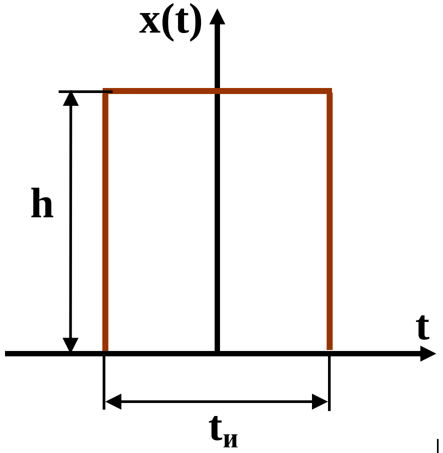
$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{T}+j\omega)t} dt = \left. \frac{e^{-(\frac{1}{T}+j\omega)t}}{\frac{1}{T}+j\omega} \right|_0^\infty = \frac{T}{1+j\omega T}$$

$$Re(\omega) = \frac{T}{1+\omega^2T^2} \qquad |X(\omega)| = \frac{T}{\sqrt{1+j\omega^2T^2}}$$

$$Im(\omega) = -\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \qquad \varphi(\omega) = -\omega T$$

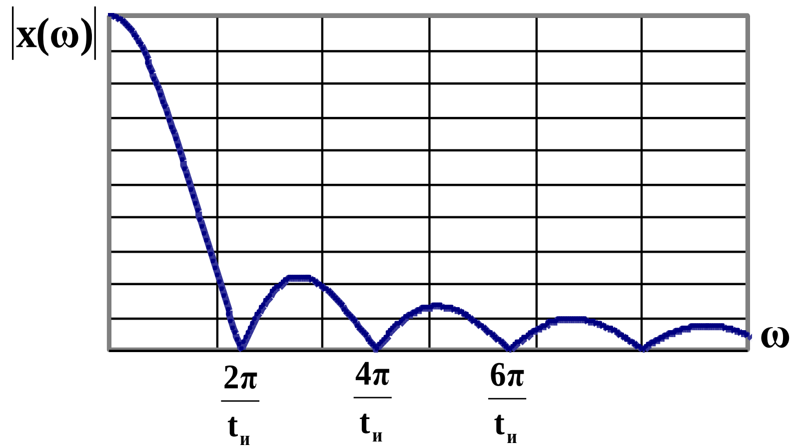


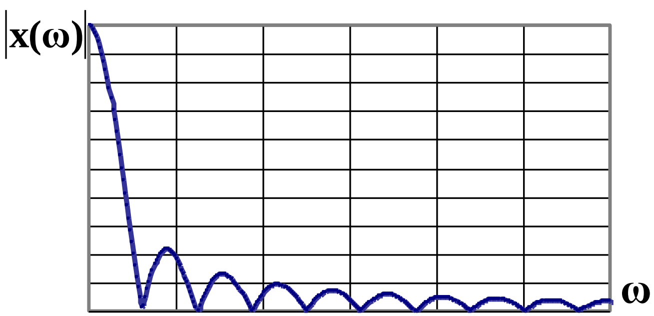


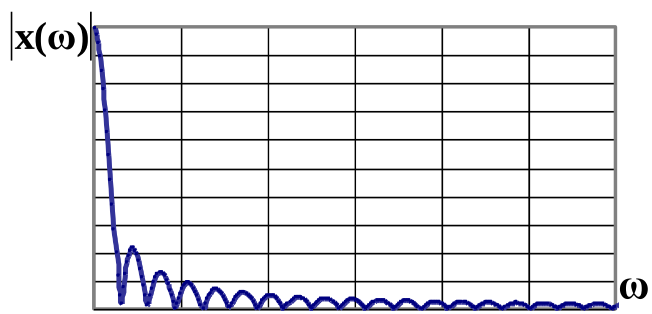


Спектр прямоугольного импульса

$$x(\omega) = \int_{-\frac{t_и}{2}}^{\frac{t_и}{2}} h e^{-j\omega t} dt = -\frac{h}{j\omega} e^{-j\omega t} \Bigg|_{-\frac{t_и}{2}}^{\frac{t_и}{2}} = \frac{h}{j\omega}\left(-e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) = \frac{h t_и \sin\left(\omega \frac{t_и}{2}\right)}{\omega \frac{t_и}{2}}$$



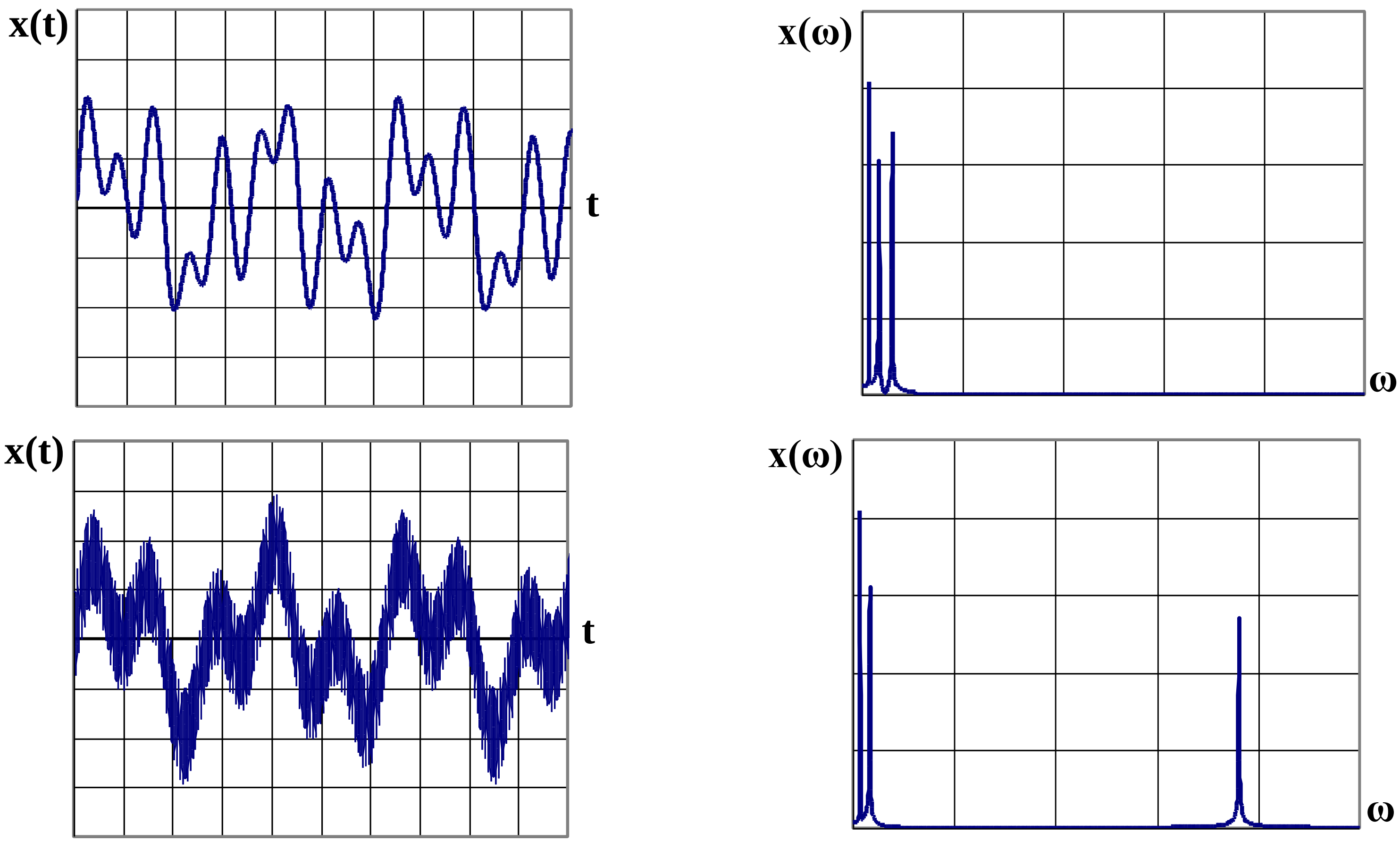




3. Почти периодические детерминированные сигналы

$$x(t) = \mathrm{Sin}(2\omega t) + \mathrm{Sin}(5\omega t) + \mathrm{Sin}(9\omega t)$$

$$x(t) = \mathrm{Sin}(2\omega t) + \mathrm{Sin}(5\omega t) + \mathrm{Sin}(\sqrt{81}\omega t)$$



Свойства преобразования Фурье

1. **Суммирование функций:** $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)$

2. **Смещение функции по аргументу:** $x(t + t_0) \leftrightarrow x(\omega)e^{j\omega t_0}$

3. **Изменение масштаба аргумента:** $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} x(\frac{\omega}{a})$

4. **Дифференцирование функции:** $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega x(\omega)$

5. **Интегрирование функции:** $\int x(t) \leftrightarrow \frac{x(\omega)}{j\omega}$

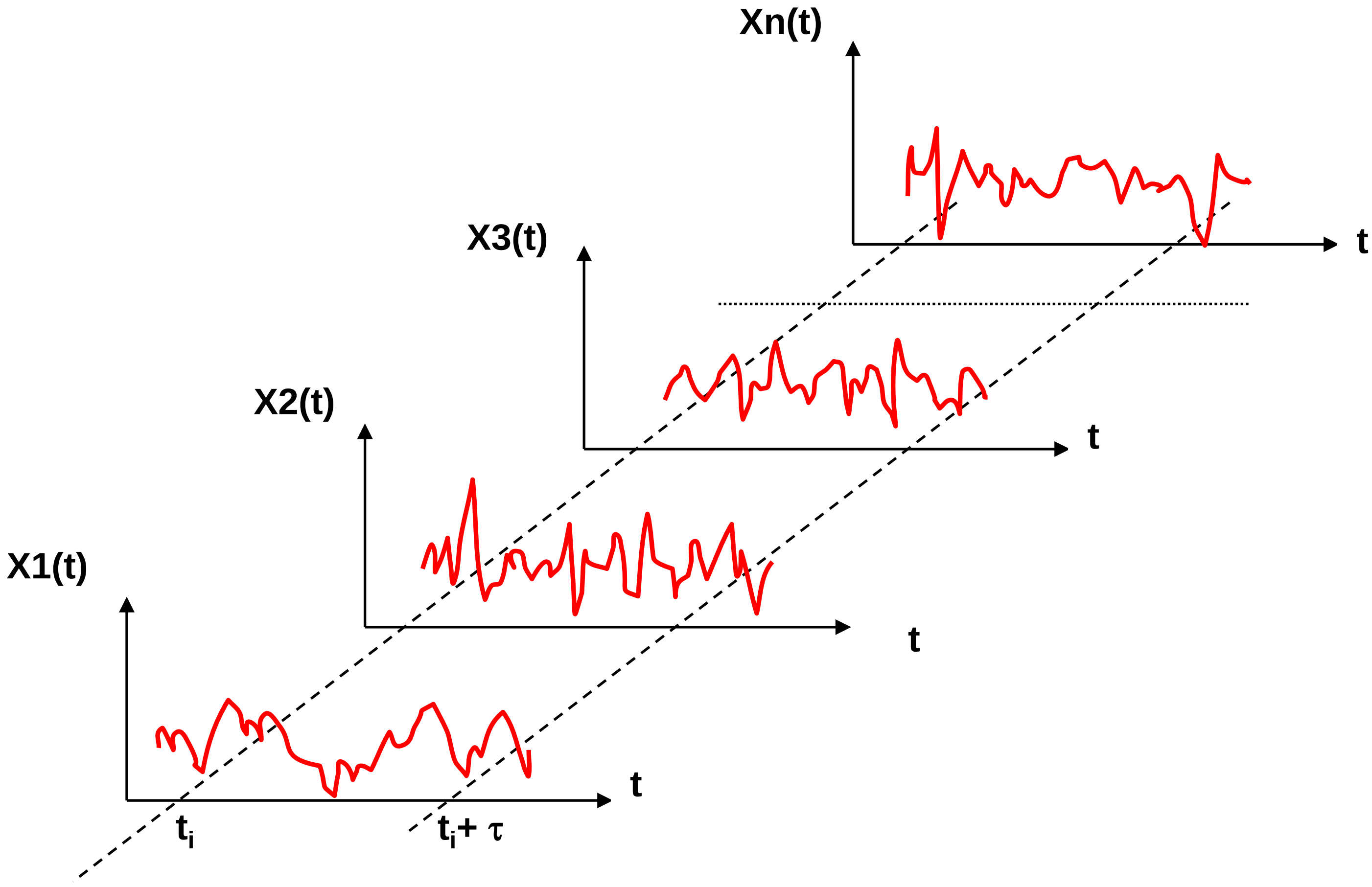
6. **Свертка функций:** $(x * h)(t) = \int_{\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ $\quad (x * h)(t) \leftrightarrow x(\omega)h(\omega)$

7. **Обратимость:** $x(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ $\quad x(t) = \int_{\infty}^{\infty} x(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайным или стохастическим процессом называется изменение случайных величин и отображающих их сигналов **во времени.**

Характеристики случайных процессов



Выборочная функция случайного процесса X(t) - единичная реализация случайного процесса на определенном временном интервале $x_k(t)$ из n возможных реализаций, образующих **статистический ансамбль**.

Полная статистическая характеристика случайного процесса - n-мерная плотность вероятностей $P(x_n;t_n)$.

Одномерное сечение случайного процесса X(t):
- совокупность значений всех реализаций случайного процесса в произвольный момент времени t_i,
- совокупность значений k-той реализации случайного процесса за все время существования процесса.

Математическое ожидание случайного процесса **по ансамблю** реализаций в фиксированном сечении t_i:

$$\mu_x(t_i) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k(t_i)$$

где N – число выборочных функций.

Функция дисперсии случайного процесса - оценка среднего взвешенного значения разности:

$$D_x(t) = M\{[X_k(t)- \mu_x(t_i)]^2\}.$$

Если среднее $\mu_x(t)$ и автокорреляционная функция $R_{xx}(t_i,t_{i+\tau})$ не зависят от момента времени t_i, случайный процесс называется **стационарным**.

Стационарный процесс

Нестационарные процессы

Процесс квантования связан с округлением значений непрерывного сигнала в соответствии с принятым решающим правилом:

- отнесение к нижней границе уровня квантования,
- отнесение верхней границе уровня квантования,
- отнесение к середине уровня квантования

$q < \Delta x_{кв} < 0$ $\qquad$ $0 < \Delta x_{кв} < +q$ $\qquad$ $-0{,}5q < \Delta x_{кв} < +0{,}5q$

Методическая погрешность квантования образуется за счет отражения непрерывной величины ограниченным числом уровней и равна разности значения, соответствующего уровню квантования $x_{кв}$ и истинного значения сигнала $x(t)$: $\Delta x_{кв} = x_{кв} - x(t)$.

Практические способы восстановления непрерывного сигнала

Аппроксимация рядом Котельникова

На практике реализовать полное восстановление сигнала без погрешностей с помощью ряда Котельникова невозможно.

Причины:

1. Экспериментальные сигналы всегда ограничены во времени, а следовательно, имеют бесконечные спектры; поэтому восстановление сигнала всегда происходит с определенной погрешностью из-за потери высокочастотной составляющей сигнала.

2. Идеальный sinc-фильтр физически нереализуем в силу бесконечного порядка передаточной функции и бесконечности ядра по времени в обе стороны (это накладывает ограничения на его реализацию как во временно́й области, так и в частотной).

Фильтрация измерительных сигналов

Фильтрация - выделение из сигнала его части, спектр которой лежит в определенной области частот.

Задачи фильтрации:

1) выделение полезного сигнала на фоне помех,
2) частотный анализ.

Виды фильтрации

П**о виду преобразований:** аналоговая и цифровая.

По расположению полос пропускания:

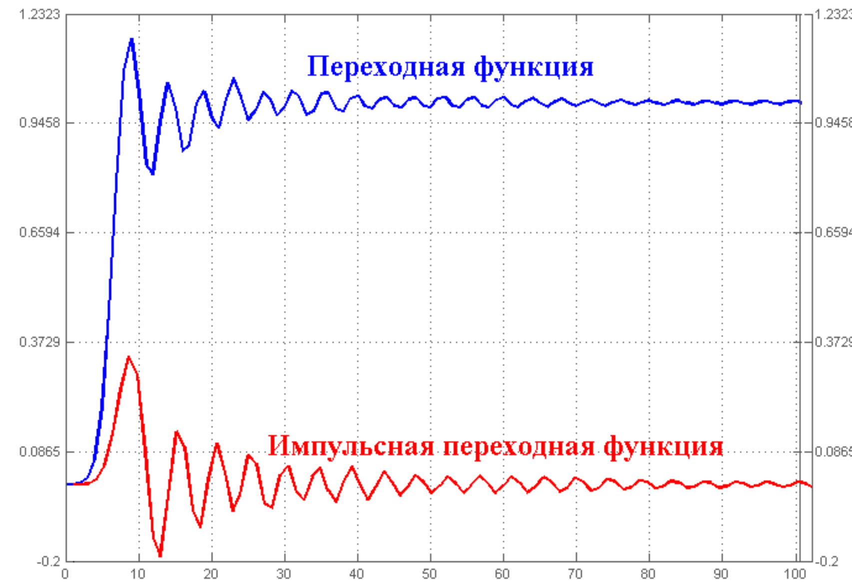
фильтрация нижних частот,

фильтрация верхних частот,

полосовая фильтрация.

По виду математического описания: линейная и нелинейная.

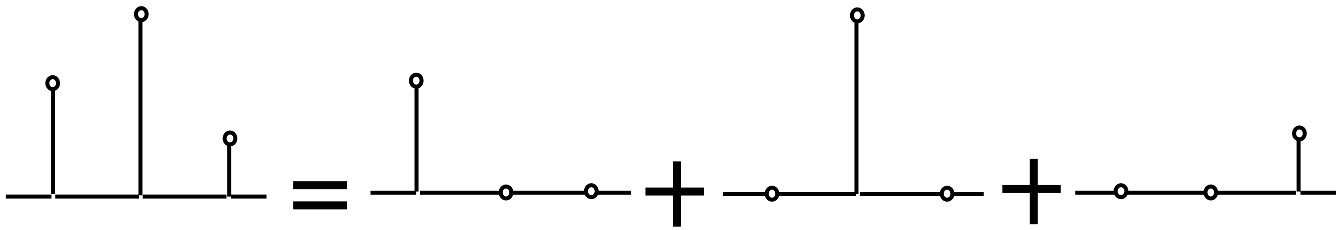
Фильтры Чебышева

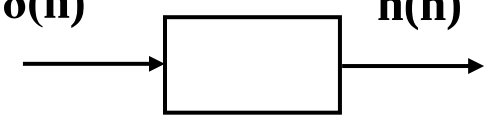


Преимущества	Недостатки
Крутой переход из области пропускания к области затухания; АЧХ наиболее близко приближается к характеристике идеального фильтра.	**Сильная волнистость АЧХ в области пропускания; сильно изменяющаяся фазовая характеристика в области пропускания; колебания с чрезмерной амплитудой и более продолжительное время установления колебаний по переходной характеристике.**

Основные теоретические понятия

Цифровая дельта-функция (функция Кронекера):





Отклик системы на $\delta[n] \rightarrow h[n]$:

h[n]- импульсная характеристика

Вычисление выходного сигнала линейной системы по входному сигналу и импульсной характеристике системы:

x[n]

x[n-1]*δ[-1]

x[n-1]*h[-1]

x[n-0]*δ[0]

x[n-0]*h[0]

x[n+1]*δ[1]

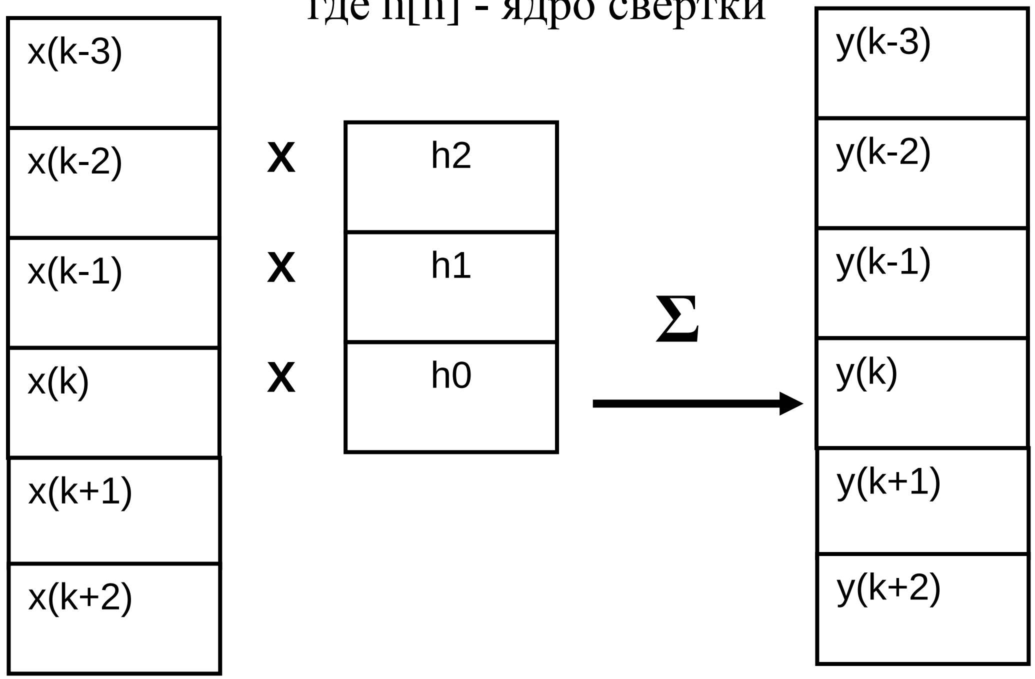
x[n+1]*h[1]

y[n]

Понятие свертки (convolution) **:**

$$y(n) = \qquad h(k)x(n-k)$$

где h[n] - ядро свертки



Для операции свертки характерны следующие основные свойства:

1. Дистрибутивность: $h(t) * [a(t)+b(t)] = h(t) * a(t)+h(t) * b(t)$.
2. Коммутативность: $h(t) * a(t) * b(t) = a(t) * b(t) * h(t)$.
3. Ассоциативность: $[a(t) * b(t)] * h(t) = h(t) * a(t) * b(t)$.

Z-преобразование

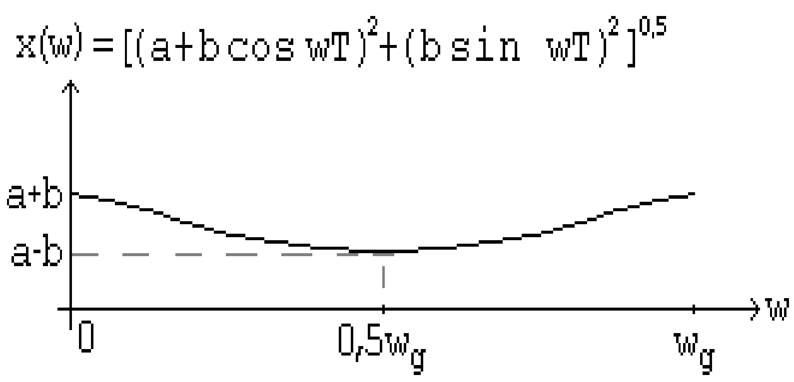
$e^{pT} = Z$

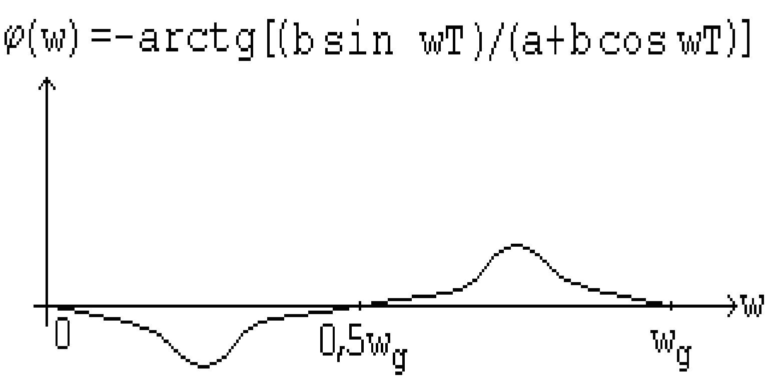
$Z = e^{jwT}$

Пример.

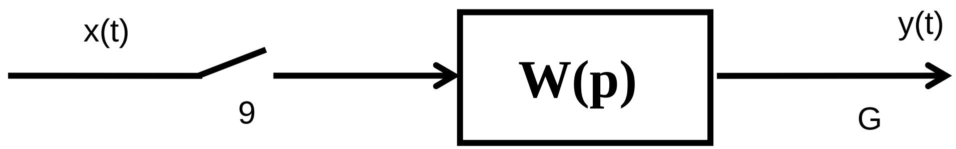
Определить спектр и построить графики модуля и аргумента спектральной плотности сигнала

x(nT) = {a ; b}





Структурные схемы цифровых фильтров



Физический смысл умножения на Z в цифровой фильтрации означает сдвиг на один интервал дискретизации:

$$x_n \longrightarrow \boxed{Z^{-1}} \longrightarrow x_{n-1}$$

Для цифровой фильтрации: $y(n) = \qquad b_k\, x(n-k)$,

Интервал (0-K) оператора получил название "окна" фильтра

Алгоритмы получения дискретной передаточной функции

Алгоритм 1.

— стандартная форма для дискретных передаточных функций.

Алгоритм 2. — разложение передаточных функций на множители

Алгоритм 3. — разложение

[redacted]

передаточных функций на элементарные дроби вида

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Изображение - функция двух вещественных переменных I(x,y), где I –интенсивность (яркость) в точке с координатами (x,y).

Цели обработки: *Image Processing* ±улучшение качества изображения
***Image Analysis* ±проведение измерений на изображении**
***Image Understanding* ±распознавание образов**

Задачи обработки: Дискретизация, квантование и кодирование изображений
Геометрические преобразования изображений
Фильтрация изображений
Препарирование изображений

При линейном контрастировании используется линейное поэлементное преобразование вида:

где параметры **a** и **b** определяются желаемыми значениями минимальной y_{min} и максимальной y_{max} выходной яркости.

Решив систему уравнений:

относительно параметров преобразования, получаем:

$$y = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}(y_{max} - y_{min}) + y_{min}$$

При $y_{min} = 0$ и $y_{max} = 255$ $\longrightarrow$

1.2. Соляризация изображения

При данном виде обработки поэлементное преобразование имеет вид:

где x_{max} - максимальное значение исходного сигнала, а k – константа.

Смысл соляризации:

- участки исходного изображения, имеющие уровень белого после обработки имеют уровень черного,
- участки исходного изображения, имеющие уровень черного, сохраняют уровень черного,
-участки исходного изображения, имеющие средний уровень яркости (серый), на выходе приобретают уровень белого.

Гомоморфная обработка изображений

Принцип суперпозиции
для линейных систем:

где H – преобразование, осуществляемое системой;
$S_1(t)$, $S_2(t)$ – преобразуемые сигналы;
С – постоянный множитель

Преобразование однозначно и обратимо.
Обработка изоморфная.

.

Обобщенный принцип
суперпозиции:

Преобразование однозначно и необратимо.
Обработка гомоморфная.

Например, операция квадрирования $H[s(t)] = [s(t)]^2$

Гомоморфная обработка мультипликативного сигнала

Характеристическая система гомоморфной системы *D*, должна иметь логарифмическую характеристику:

Сигнал на выходе системы D:

$$x(t) = \log[s(t)] = \log[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log[s_1(t)] + \log[s_2(t)] = x_1(t) + x_2(t),$$

.

Сигнал на выходе системы D^{-1}:

Преобразование Фурье изображений

Преобразование Фурье одномерных сигналов:

- прямое

- обратное

Преобразование Фурье двухмерных сигналов

- прямое

- обратное

Спектр Фурье изображения

Программная реализация гомоморфной фильтрации для обработки изображений

Способы описания объектов

1 Списки признаков

(Выявление качественных характеристик объекта и построение характеризующего вектора)

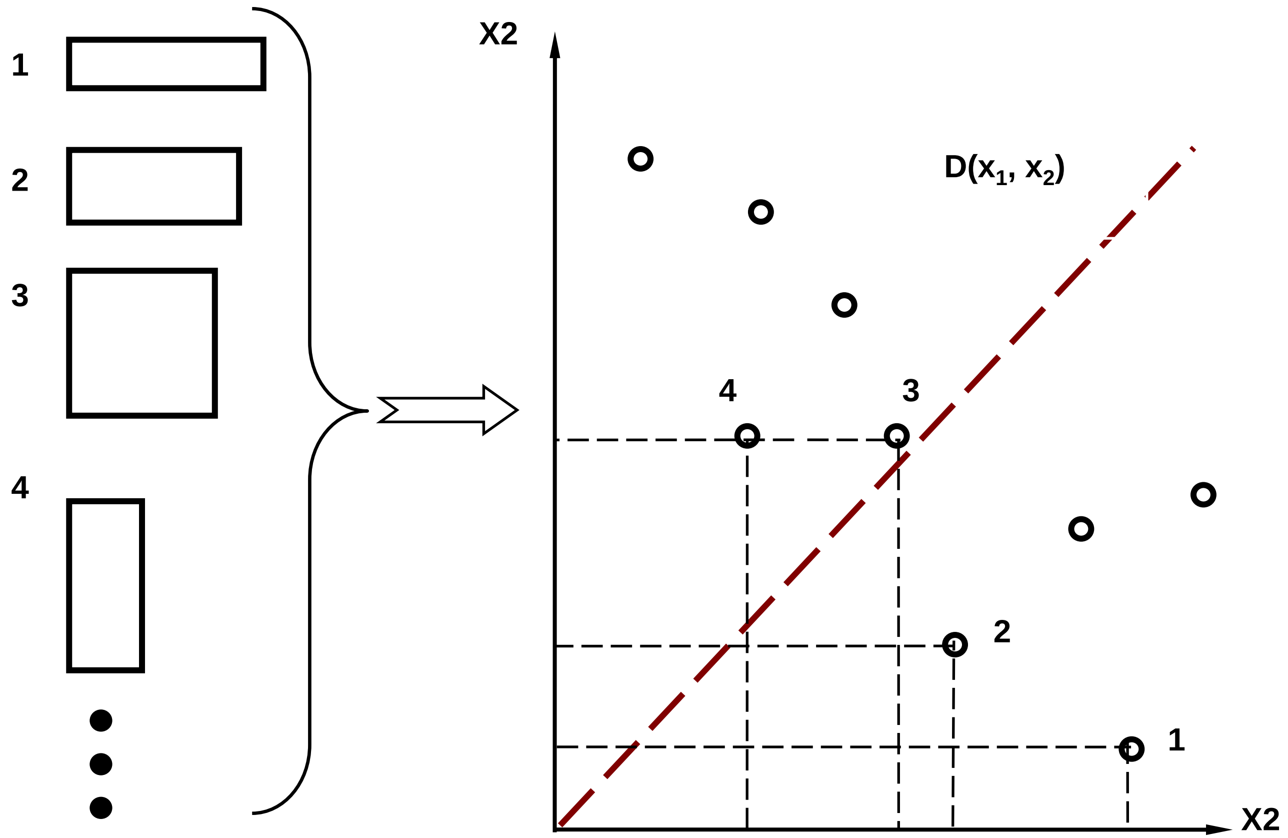
Принадлежность к классу:
Y1 - ?
Y2 - ?
Y3 - ?
Y4 - ?
Y5 - ?

2 Структурное описание

(Выявление структурных элементов объекта и определение их взаимосвязи)

3 Описание в евклидовом пространстве

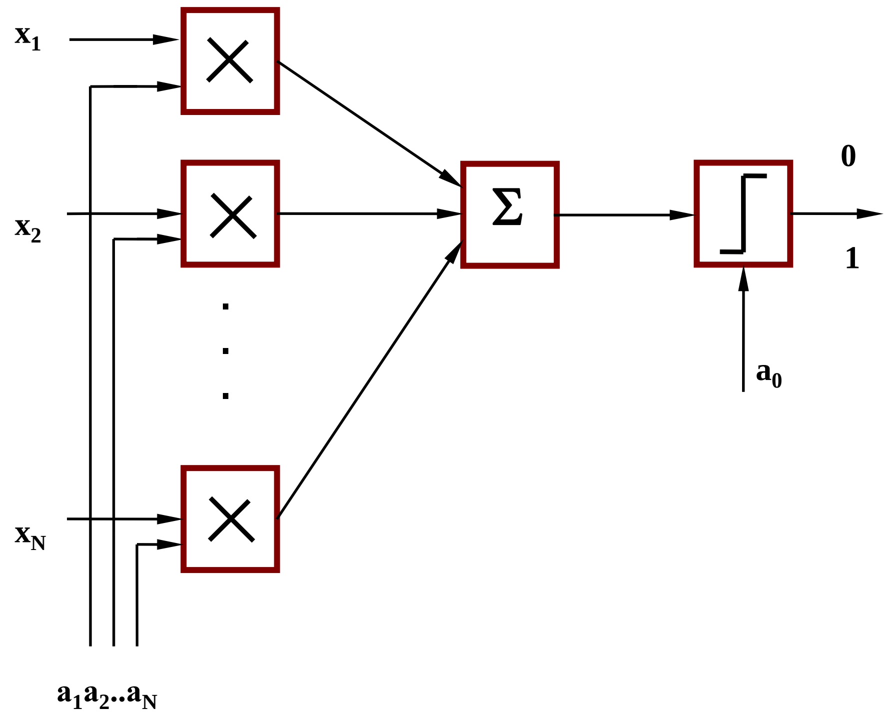
(Объекты представляются точками в евклидовом пространстве их вычисленных параметров)



Персептрон Розенблатта

$$D(x) = ax = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \begin{cases} > 0, x \in S_1, \\ < 0, x \in S_2 \end{cases}$$

где x – вектор признаков (обучающий вектор),
S1, S2 – классы обучающей выборки,
a_i – веса признаков



Задача решаема если обучающие выборки двух классов линейно разделимы.

Кластерный анализ

(самообучение, обучение без учителя, таксономия)

Кластерный анализ – совокупность математических методов, предназначенных для формирования относительно "отдаленных" друг от друга групп "близких" между собой объектов по информации о расстояниях или связях (мерах близости) между ними. Причем внутри групп объекты должны быть тесно связаны между собой, объекты разных групп должны быть далеки друг от друга

Форма представления исходных данных

Расстояние между признаками (мера близости)

Обычное Евклидово расстояние:

"Взвешенное" Евклидово расстояние:

Хеммингово расстояние:

$$\rho_O(x_i, x_j) = \sum \left| x_i - x_j \right|$$

Матрица расстояний:

$$R_1 = \left\{\rho\left(x_i, x_j\right)\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}24 & 3 & 5{,}10 & 6{,}08 & 5{,}83 \\ 2{,}24 & 0 & 1{,}41 & 5 & 5{,}83 & 6{,}40 \\ 3 & 1{,}41 & 0 & 6{,}40 & 7{,}21 & 7{,}81 \\ 5{,}10 & 5 & 6{,}40 & 0 & 1 & 2 \\ 6{,}08 & 5{,}83 & 7{,}21 & 1 & 0 & 2{,}24 \\ 5{,}83 & 6{,}40 & 7{,}81 & 2 & 2{,}24 & 0 \end{pmatrix}$$

После объединения 4 и 5:

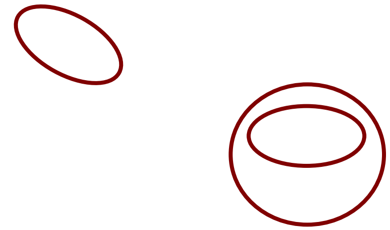
Расстояние между кластерами:

Тогда матрица расстояний:

После объединения 2 и 3:

Расстояние между кластерами:

Тогда матрица расстояний:



После объединения (4,5) и 6: **S(1), S(2,3), S(4,5,6)**

Расстояние между кластерами:

Тогда матрица расстояний: